

FELDESTÄRKEN EINER GLEICHFÖRMIG BEWEGTEN LADUNG

Diese Aufgabe bildet einen schönen Abschluss, zeigt sie doch, dass Sie mit dem in diesem Semester erarbeiteten Stoff ein gar nicht so einfaches Problem behandeln können. Zur Erinnerung: es bezeichne Λ eine Lorentz-Transformation $x^m \mapsto x'^m = \Lambda^m_n x^n$. Der Feldstärketensor transformiert dann, wie in der Vorlesung gezeigt, gemäß

$$F'_{mn}(x) = \Lambda^{-1r}_m \Lambda^{-1s}_n F_{rs}(\Lambda^{-1}x). \tag{1}$$

[H35] Gleichförmig bewegte Ladung [3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 30 Punkte]

Jetzt geht es zur Sache. Wir wollen die Komponenten $E^i = F_{0i}$ und $B^k = -\frac{1}{2}\epsilon_{kij}F_{ij}$, $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, des elektrischen und magnetischen Feldes bestimmen.

- (a) Machen Sie sich diesen Zusammenhang zwischen \vec{E} , \vec{B} und dem Feldstärketensor F explizit klar. Nutzen Sie dazu die Definition $F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m$.
- (b) Spalten Sie in (1) die Summationen auf und schreiben Sie die Beiträge für $r = 0$ oder $s = 0$ getrennt hin. Geben Sie damit die Transformationsgesetze für E'^i und B'^m an.
- (c) Es sei Λ eine drehungsfreie Lorentztransformation, die lediglich die Weltlinie $x(s) = (s, 0, 0, 0)$ eines im Ursprung ruhenden Teilchens auf diejenige eines Teilchens abbildet, das sich mit Geschwindigkeit v in Richtung \vec{n} bewegt, $\Lambda x(s) = \frac{s}{\sqrt{1-v^2}}(1, v\vec{n})$. Geben Sie Λ für den Fall $\vec{n} = \vec{e}_x$ als (4×4) -Matrix an. *Hinweis:* Die Abkürzung $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ ist nützlich.
- (d) Für beliebiges \vec{n} hat Λ die folgende Form:

$$\Lambda^0_0 = \gamma, \quad \Lambda^0_i = \Lambda^i_0 = \gamma v n^i, \quad \Lambda^i_j = \delta^i_j + (\gamma - 1)n^i n^j.$$

Die Herleitung dieses Resultats ist für eine Übung allerdings zu lang ; -) Wir können allerdings überprüfen, dass diese Matrix Vektoren parallel und senkrecht zu \vec{n} genauso abbildet, wie die Lösung aus (c) Vektoren parallel und senkrecht zur x -Achse abbildet.

- (e) Wie sieht Λ^{-1} aus? *Hinweis:* Bevor Sie anfangen, Λ zu invertieren, überlegen Sie, was Λ^{-1} eigentlich tut. Erinnern Sie die Resultate aus der Vorlesung, $\Lambda^\top = \Lambda$ und $\Lambda^{-1\top} = \eta \Lambda \eta^{-1}$.
- (f) Setzen Sie das in (e) angegebene Λ^{-1} in die in (b) berechneten Formeln für E'^i und B'^m ein und geben Sie damit die Feldstärken des bewegten Teilchens an.
- (g) Zerlegen Sie Ihre Ergebnisse aus (f) in die Anteile parallel und senkrecht zur Bewegungsrichtung \vec{n} . Was fällt Ihnen auf?
- (h) Ein bei $\vec{x} = 0$ ruhendes Teilchen der Ladung q erzeugt bei (t, x, y, z) die Feldstärken

$$\vec{E}(t, x, y, z) = \frac{q}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \vec{B}(t, x, y, z) = 0.$$

Zeigen Sie explizit, dass für ein Teilchen, das sich mit Geschwindigkeit v längs der x -Achse bewegt, gilt:

$$(E'_x, E'_y, E'_z) = \frac{q}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (\sqrt{1-v^2}x, y, z).$$

Beachten Sie dazu, dass die alten Feldstärken am Urbild $\Lambda^{-1}x$ des Arguments der neuen Feldstärken zu nehmen sind.

- (i) Drücken Sie die Argumente (t, x, y, z) von \vec{E} durch die Argumente von \vec{E}' aus, $x = \gamma(x' - vt')$, $y = y'$, $z = z'$, und zeigen Sie:

$$\vec{E}'(t', x', y', z') = \frac{q}{4\pi} \frac{(1-v^2)}{((x' - vt')^2 + (1-v^2)(y'^2 + z'^2))^{3/2}} (x' - vt', y', z').$$

Bitte wenden!

(j) Identifizieren Sie schließlich

$$\sin^2 \theta = \frac{y'^2 + z'^2}{(x' - vt')^2 + y'^2 + z'^2},$$

und bringen Sie damit das Resultat in die Form

$$\vec{E}'(t', x', y', z') = \frac{q}{4\pi} \frac{(1 - v^2)}{(1 - v^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \frac{\vec{r}'(t')}{(r'(t'))^3}.$$

Welcher Winkel ist θ , und in welche Richtung zeigt das elektrische Feld eines sich gleichförmig bewegenden Teilchens?

HINWEIS

Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe (Nummer und Name des Tutors) an! Lösungen unbedingt zusammenheften!